

ALJABAR

Persamaan dan Pertidaksamaan Linear



Persamaan Linear adalah persamaan yang mengandung variabel berpangkat satu.



Pertidaksamaan Linear adalah kalimat terbuka yang mengandung variabel berderajat satu yang menggunakan tanda $<$, $>$, $\leq$, dan $\geq$.

Sistem Persamaan Linear Multivariabel



Sistem Persamaan Linear Multivariabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari dua variabel atau lebih dan masing-masing persamaan berbentuk linear.

BENTUK UMUM

1. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3 = d_3 \end{cases}$$

METODE PENYELESAIAN

1. **Eliminasi** adalah dengan menghapus atau menghilangkan salah satu variabel dalam persamaan tersebut.

Contoh:

a. SPLDV

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 5x - 6y = 6 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Mengeliminasi variabel y

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4y = 3 & \times 3 & 9x - 12y = 9 \\ 5x - 6y = 6 & \times 2 & 10x - 12y = 12 \\ \hline & & -x = -3 \\ & & x = 3 \end{array}$$

Mengeliminasi variabel x

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4y = 3 & \times 5 & 15x - 20y = 15 \\ 5x - 6y = 6 & \times 3 & 15x - 18y = 18 \\ \hline & & -2y = -3 \\ & & y = \frac{3}{2} \end{array}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

b. SPLTV

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 4z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Eliminasi y dari persamaan (1) dan (2) kemudian persamaan (2) dan (3)

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2y + 3z = 22 & \times 1 & 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 4z = 19 & \times 2 & 6x - 2y + 8z = 38 \\ \hline & & 8x + 11z = 60 \dots(4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3x - y + 4z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \\ \hline 8x + 6y = 40 \dots(5) \end{array}$$

Eliminasi x dari persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{rcl} 8x + 6y = 40 \\ 8x + 11z = 60 \\ \hline 5z = 20 \\ z = 4 \end{array}$$

Eliminasi z dari persamaan (4)

dan (5)

$$\begin{array}{rcl} 8x + 6y = 40 & \times 6 & 48x - 66y = 360 \\ 8x + 11z = 60 & \times 11 & 88x - 66y = 440 \quad - \\ \hline & & -40x = -80 \\ & & x = 2 \end{array}$$

Substitusikan $x = 2$ dan $z = 4$ ke

persamaan (2)

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= 19 \\ \Leftrightarrow 3(2) - y + 4(4) &= 19 \\ \Leftrightarrow 6 - y + 16 &= 19 \\ \Leftrightarrow -y &= -3 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $(2, 3, 4)$.

- 2. Substitusi** adalah dengan cara mengubah satu variabel dengan variabel dari persamaan lain.

Contoh:

a. SPLDV

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x - 10y = 23 \\ 3x - 5y = 19 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} x - 10y &= 23 \Rightarrow x = 10y + 23 \\ 3x - 5y &= 19 \\ \Leftrightarrow 3(10y + 23) - 5y &= 19 \\ \Leftrightarrow 30y + 69 - 5y &= 19 \\ \Leftrightarrow 25y &= -50 \\ \Leftrightarrow y &= -2 \\ x = 10y + 23 &= 10(-2) + 23 = 3 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $(3, 2)$

b. SPLTV

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 22 \\ 3x - y + 2z = 19 \\ 5x + y + 2z = 21 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 21 \\ y &= -5x - 2z + 21 \quad (4) \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (1)

$$2x + 2y + 3z = 22$$

$$2x + 2(-5x - 2z + 21) + 3z = 22$$

$$2x - 10x - 4z + 42 + 3z = 22$$

$$-8x - z = -20 \quad (5)$$

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (2)

$$3x - y + 2z = 19$$

$$3x - (-5x - 2z + 21) + 2z = 19$$

$$3x + 5x + 2z - 21 + 2z = 19$$

$$8x + 6z = 40 \quad (6)$$

$$-8x - z = -20$$

$$z = -8x + 20 \quad (7)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (6)

$$8x + 6z = 40$$

$$8x + 6(-8x + 20) = 40$$

$$8x - 48x + 120 = 40$$

$$-40x = -80$$

$$x = 2$$

Substitusikan $x = 2$ ke persamaan (7)

$$z = -8x + 20 = -8(2) + 20 = 4$$

Substitusikan $x = 2$ dan $z = 4$ ke persamaan (4)

$$y = -5x - 2z + 21 = -5(2) - 2(4) + 21 = 3$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $(2, 3, 4)$.

- 3. Campuran** adalah kombinasi dari eliminasi dan substitusi.

Contoh SPLDV:

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 5x - 6y = 6 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Mengeliminasi variabel y

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4y = 3 & \times 3 & 9x - 12y = 9 \\ 5x - 6y = 6 & \times 2 & 10x - 12y = 12 \quad - \\ \hline & & -x = -3 \\ & & x = 3 \end{array}$$

Substitusi $x = 3$ ke persamaan (1)

$$3x - 4y = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(3) - 4y = 3$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4y = 3$$

$$\Leftrightarrow -4y = -6$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $(3, \frac{3}{2})$

4. **Grafik** adalah titik potong atau titik persekutuan antara dua garis yang memenuhi kedua persamaan tersebut.

Contoh SPLDV:

Tentukan himpunan penyelesaian di bawah ini!

$2x - y = 2$

$x + y = 4$

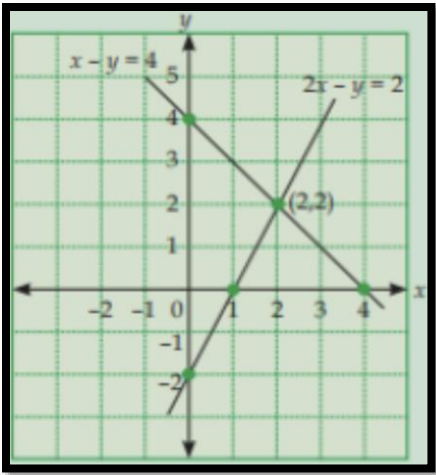
Penyelesaian:

$2x - y = 2$

x	0	1
y	-2	0

$x + y = 4$

x	0	4
y	4	0



Sistem Pertidaksamaan Linear Multivariabel



Sistem Pertidaksamaan Linear Multivariabel adalah sistem yang terdiri dari dua variabel atau lebih pertidaksamaan linear yang melibatkan dua variabel atau lebih.

Contoh SPtLDV:

Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut ini:

$2x + 3y \leq 6$

$4x + y \leq 8$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Penyelesaian:

Ubah pertidaksamaan menjadi sama dengan dan tentukan titik poinnya

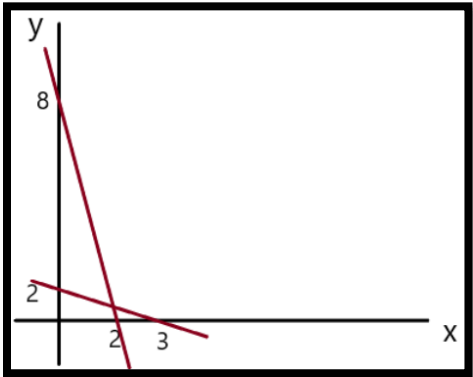
$2x + 3y \leq 6 \rightarrow 2x + 3y = 6$

x	0	3
y	2	0
x, y	(0, 2)	(3, 0)

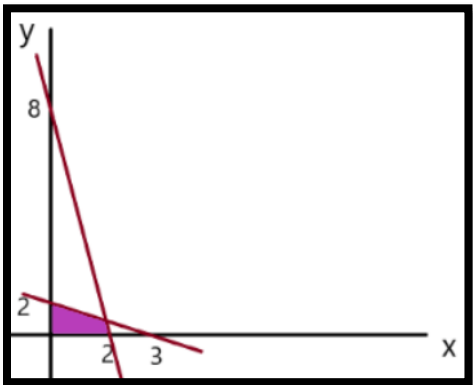
$4x + y \leq 8 \rightarrow 4x + y = 8$

x	0	2
y	8	0
x, y	(0, 8)	(2, 0)

Gambar titik potong dari kedua persamaan



Lakukan uji titik untuk mendapatkan daerah penyelesaiannya



Program Linear



Program Linear adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah dalam bentuk pertidaksamaan linear. Adapun bentuk umum pertidaksamaan linearnya adalah $ax + by \leq c$.

MENGAMBAR DAERAH PERTIDAKSAMAAN

- 1. Menentukan 2 titik potong yang dilewati persamaan garis $ax + by = c$. Titik potong yang digunakan adalah sumbu x dan sumbu y.
- 2. Menentukan daerah penyelesaian, bisa juga himpunan penyelesaian menggunakan 2 metode, yaitu metode titik uji dan metode $ax + by > c$ (daerah sebelah kanan garis) atau $ax + by < c$ (daerah sebelah kiri garis), dengan $a > 0$.

Contoh:

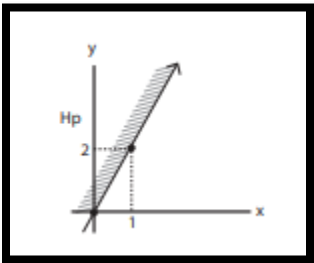
Gambarlah daerah pertidaksamaan $2x \leq y$!

Penyelesaian:

Pertama, mencari 2 titik potong garis $2x = y$

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	2	(1,2)

Karena $2x \leq y$ bisa diubah menjadi $2x - y \leq 0$, maka daerah yang diambil adalah daerah kiri.



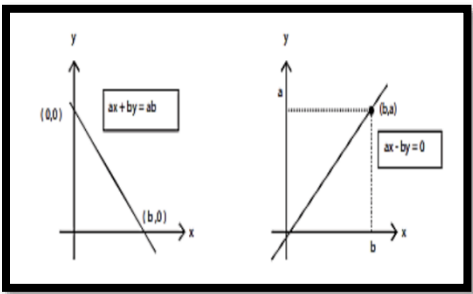
MENENTUKAN PERTIDAKSAMAAN DARI DAERAH YANG DIKETAHUI

- 1. Menentukan persamaan garisnya terlebih dahulu. Persamaan garis sudah kamu pelajari di bagian gradien.
- 2. Saat menentukan persamaan garis pada koordinat kartesius, dibutuhkan minimal dua titik yang diketahui. Kedua titik tersebut dimisalkan sebagai (x_1, y_1)

dan (x_2, y_2) . Lalu, substitusikan kedua nilai x dan y ke persamaan berikut.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- 3. Atau bisa menggunakan cara berikut.



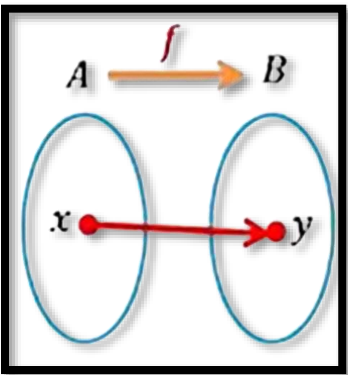
Fungsi



Fungsi adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, jika terdapat setiap anggota berpasangan tepat satu anggota himpunan B.

NOTASI FUNGSI

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan $f: A \rightarrow B$



Jika anggota himpunan A dinotasikan dengan x dan anggota himpunan B dinotasikan dengan y maka fungsi f **memetakan** $x \in A$ ke $y \in B$, y disebut sebagai **bayangan/peta/nilai fungsi dari x** dan dirumuskan $y = f(x)$ sedangkan x disebut **prapeta**.

Contoh:

Diketahui $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Tentukan nilai dari $f(-2)$!

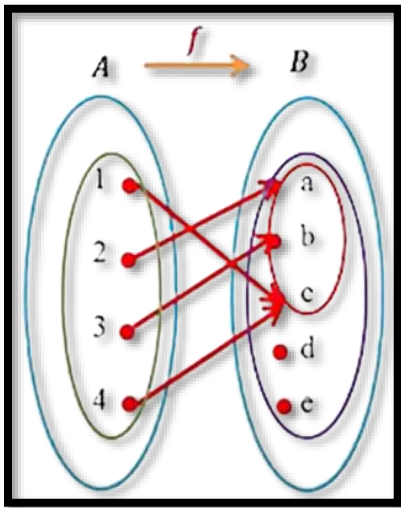
Penyelesaian:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$
 $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3$
 $= 4 - 4 - 3$
 $= -3$

Domain, Kodomain, dan Range Fungsi



Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B , maka himpunan A disebut **domain (daerah asal)** dan himpunan B disebut **kodomain (daerah kawan)**. Sedangkan himpunan B yang berpasangan (himpunan C) disebut **range (hasil)** fungsi f .



CATATAN:
Jika daerah asal suatu fungsi tidak diketahui maka daerah asal fungsi tersebut merupakan himpunan semua bilangan real (daerah asal alami).

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ merupakan domain.
- $B = \{a, b, c, d\}$ merupakan kodomain.
- $R = \{a, b, c\}$ merupakan range.

Representasi Fungsi Linear, Kuadrat, dan Rasional dalam Berbagai Bentuk



Fungsi Linear. Bentuknya adalah $y = mx + c$ dengan m dan b adalah bilangan real. Jika fungsi ini dinyatakan dalam bentuk grafik, maka grafik dari fungsi ini akan berbentuk garis lurus. Ciri khas fungsi linear Adalah dia tumbuh pada laju tetap.

TAHAPAN MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

LINEAR

- Tentukan dua buah nilai x dan y sembarang, sehingga kita dapatkan dua buah titik yang memenuhi fungsi tersebut.
- Plot dua titik tersebut pada bidang koordinat, kemudian hubnngkan kedua titik tersebut sehingga akan terbentuk garis lurus. Garis lurus inilah grafik fungsi linear $y = mx + c$.

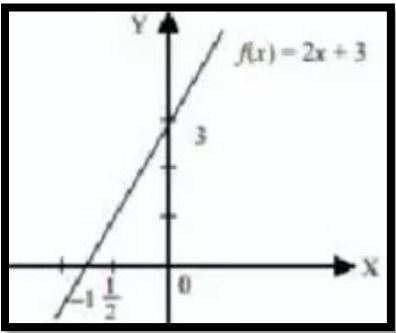
Contoh:

Jika diketahui $f(x) = 2x + 3$, gambarlah grafiknya!

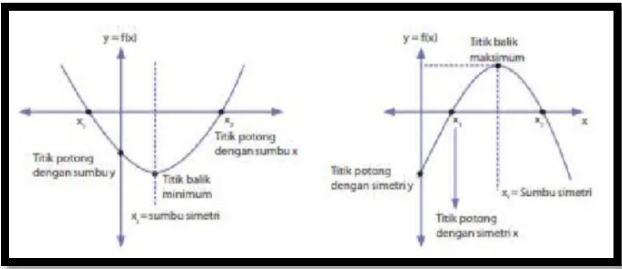
Penyelesaian:

	$2x + 3$	
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$F(x)$	3	0

Grafik:



Fungsi Kuadrat.



PERPOTONGAN PARABOLA $f(x) = ax^2 + bx + c$ DENGAN SUMBU-SUMBU KOORDINAT

PENTING UNTUK DIKETAHUI.

- Menentukan titik potong dengan sumbu $X \rightarrow y = 0$.
- Menentukan titik potong dengan $Y \rightarrow x = 0$.

c. Menentukan persamaan sumbu simetri

$$x = -\frac{b}{2a}$$

d. Menentukan titik puncak $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, $D = b^2 - 4ac$.

Contoh:

Gambarlah grafik parabola dari grafik fungsi $y = x^2 - 3x - 4$ dan tandai puncak dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat!

Penyelesaian:

Grafik fungsi $y = x^2 - 3x - 4$ mempunyai:

$$\text{Sumbu simetri: } x = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Puncak di } (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$$

Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

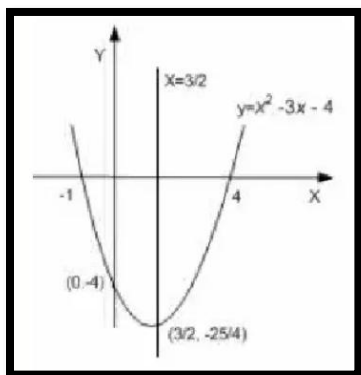
$$\text{Dengan sumbu } y: x = 0 \Rightarrow y = -4$$

$$\text{Dengan sumbu } x: y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 4$$

$$\text{Atau } 0 = (x - 4)(x + 1)$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x di $(4, 0)$ dan $(-1, 0)$, dengan sumbu y di $(0, -4)$

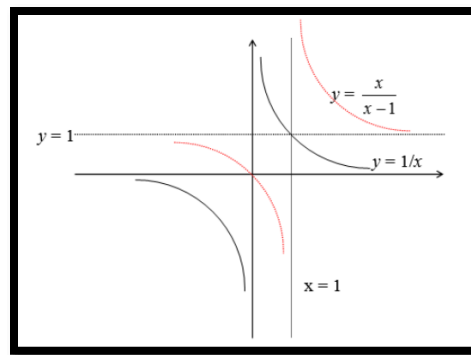
Grafik:



Fungsi Rasional adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ merupakan suku banyak dalam x dan $Q(x) \neq 0$ pada domainnya.

Contoh:

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ dan } f(x) = \frac{x}{x-1}$$



NILAI NOL FUNGSI

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai-nilai x yang menyebabkan $f(x) = 0$ disebut nilai nol dari fungsi $f(x)$. Dapat dibuktikan bahwa jika $f(x) = 0$, maka juga $P(x) = 0$. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan $P(x) = 0$.

Perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan $P(x) = 0$ belum tentu merupakan nilai nol fungsi $f(x)$. Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat $Q(x) = 0$. Untuk x yang bersama-sama membuat $P(x)$ dan $Q(x)$ bernilai nol menyebabkan $f(x)$ mempunyai nilai tak tentu.

Misalnya, pada fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 4}$, nilai $x = 1$ bukan nilai nol dari fungsi $f(x)$ sekalipun untuk $P(x) = x^2 - 3x + 2$ berlaku $P(1) = 0$. Ini karena juga berlaku $Q(1) = 0$, sehingga $f(1)$ bernilai tak tentu.

Contoh:

$$\text{Tentukan nilai nol dari } f(x) = \frac{3x-6}{2x+1}$$

Penyelesaian:

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut Adalah $x = 3$.

GRAFIK FUNGSI RASIONAL

Langkah-langkah:

- a. Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
- b. Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
- c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
- d. Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah tertentu)
- e. Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
- f. Mensketsa kurvanya

Jenis-jenis asimptot:

- a. Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
- b. Asimptot datar, diperoleh bila $x \rightarrow \infty$
- c. Asimptot miring, hanya untuk jenis fungsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya

Contoh:

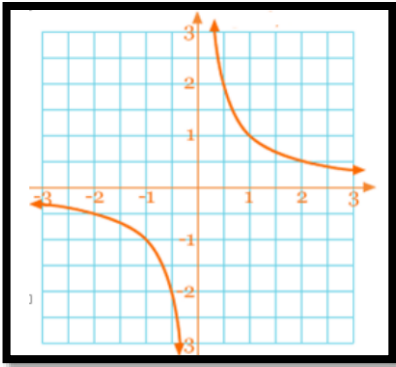
Gambar sketsa grafik $f(x) = \frac{1}{x}$

Penyelesaian:

- 1. Titik potong sumbu x dan sumbu y tidak ada
- 2. Asimptot-asimptot : tegak : garis $x = 0$
datar : untuk $x \rightarrow \infty$ diperoleh $y = f(x) = 0$
Jadi garis $y = 0$ sebagai asimptot datar
- 3. Titik-titik bantu :

x	-1	-2	-3	-4	1	2	3	4
f(x)	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

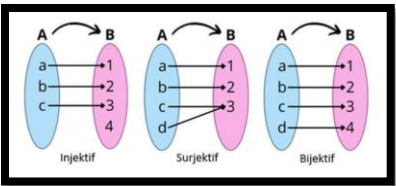
- 4. Sketsa grafik



Invers Fungsi

 **Fungsi Invers** adalah fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya.

PEMETAAN FUNGSI INVERS

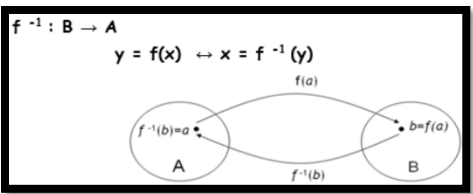


BENTUK UMUM FUNGSI INVERS

Misalkan, f merupakan fungsi yang memetakan x ke y , sehingga dapat ditulis $y = f(x)$, maka f^{-1} adalah fungsi yang memetakan y ke x , ditulis $x = f^{-1}(y)$.

Contoh:

Invers fungsi f adalah fungsi yang mengawankan setiap elemen B dengan tepat satu elemen pada A. Invers fungsi f dinyatakan dengan f^{-1} seperti di bawah ini:



CARA MENCARI INVERSI SUATU FUNGSI

- 1. Ubahlah bentuk $y = f(x)$ menjadi bentuk $x = f(y)$.
- 2. Tuliskan x sebagai $f^{-1}(y)$ sehingga $f^{-1}(y) = f(y)$.

3. Ubahlah variabel y dengan x sehingga diperoleh rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$.

RUMUS FUNGSI INVERS

Fungsi asal	Fungsi invers
$f(x) = ax + b ; a \neq 0$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} ; a \neq 0$
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} ; x \neq -\frac{d}{c}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} ; x \neq \frac{a}{c}$
$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$	$f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a} ; a \neq 0$
$f(x) = {}^a\log cx ; a > 0 \neq 1 ; cx > 0$	$f^{-1}(x) = \frac{a^x}{c} ; c \neq 0$
$f(x) = a^x ; a > 0 \neq 1$	$f^{-1}(x) = {}^a\log x^{1/c} = \left(\frac{1}{c}\right) {}^a\log x ; c \neq 0$

Contoh:

Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi

$$f(x) = 2x + 6.$$

Penyelesaian:

$$y = f(x) = 2x + 6$$

$$2x = y - 6$$

$$x = \frac{1}{2}y - 3$$

$$\text{Jadi, } f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3 \text{ atau } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

Fungsi Komposisi



Fungsi Komposis adalah **fungsi yang melibatkan lebih dari satu fungsi**. Ketika ada suatu fungsi, kemudian dilanjutkan dengan fungsi lainnya, maka akan membentuk suatu fungsi baru. Fungsi baru inilah fungsi hasil komposisi dari kedua fungsi sebelumnya.

Misalnya, ada fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Fungsi f komposisi g adalah fungsi yang dipetakan oleh fungsi $g(x)$ kemudian dilanjutkan oleh fungsi $f(x)$. Operasi fungsi komposisi biasa dilambangkan dengan “o” dan dibaca komposisi atau bundaran.

BENTUK-BENTUK FUNGSI KOMPOSISI

1. $(f \circ g)(x)$

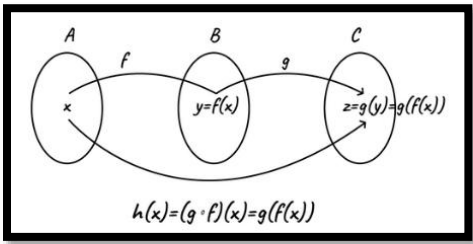
$(f \circ g)(x)$ dapat dibaca “fungsi f komposisi g ” atau “ f bundaran g ”, yang artinya **fungsi yang dipetakan oleh fungsi $g(x)$ kemudian dilanjutkan oleh fungsi $f(x)$** .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

2. $(g \circ f)(x)$
- $(g \circ f)(x)$ dapat dibaca “fungsi g komposisi f ” atau “ g bundaran f ”, yang artinya **fungsi yang dipetakan oleh fungsi $f(x)$ kemudian dilanjutkan oleh fungsi $g(x)$** .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Contoh:



Jika $f : A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ dan $g : A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $g(x)$, maka hasil dari f komposisi g adalah $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

SIFAT-SIFAT FUNGSI KOMPOSISI

Jika $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$, maka berlaku:

1. Tidak komutatif

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$
2. Asiosiatif

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$
3. Memiliki fungsi identitas

$$(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$$

Contoh:

Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = 3x - 7$, maka $(f \circ g)(x)$ adalah

Penyelesaian:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 5$$

$$(f \circ g)(x) = 2(3x - 7) + 5$$

$$(f \circ g)(x) = 6x - 14 + 5$$

$$(f \circ g)(x) = 6x - 9$$

Jadi, $(f \circ g)(x) = 6x - 9$

Barisan dan Deret



Konsep Dasar Barisan dan Deret.

- Barisan Aritmatika: $U_n = a + (n - 1)b$
- Deret Aritmatika: $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)b$
- Barisan Geometri: $U_n = ar^{n-1}$
- Deret Geometri: $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Pertumbuhan



Pertumbuhan adalah perubahan kuantitatif pada materiil sesuatu sebagai akibat dari adanya pengaruh lingkungan.

Bila keadaan awal dinyatakan dengan M_o , laju pertumbuhan dinyatakan dengan p dan lamanya pertumbuhan dengan n , maka:

Periode n	Pertumbuhan	M_n
1	$M_o \times p$	$M_1 =$ $M_o + M_o \times p =$ $M_o (1 + p)$
2	$M_1 \times p$	$M_2 =$ $M_1 + M_1 \times p =$ $M_1 (1 + p) =$ $M_o (1 + p)(1 + p) =$ $M_o (1 + p)^2$
3	$M_2 \times p$	$M_3 =$ $M_2 + M_2 \times p =$ $M_2 (1 + p) =$ $M_o (1 + p)^2 (1 + p) =$ $M_o (1 + p)^3$
n	---	$M_n = M_o (1 + p)^n$

Contoh:

Banyak penduduk suatu kota setiap tahun meningkat sekitar 1% dari banyak penduduk tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk pada tahun 2009, penduduk di kota tersebut berbanyak

100.000 orang. Hitung banyak penduduk pada akhir tahun 2014!

Penyelesaian:

Banyak penduduk pada akhir tahun 2009,
 $M_o = 100.000$ orang

Faktor pertumbuhan, $p = 1\% = 0,01$ per tahun
Periode pertumbuhan s.d. 2014, $n = 5$ tahun.

Banyak penduduk setelah 5 tahun,

$$M_n = M_o (1 + p)^n$$

$$M_5 = 100000 (1 + 0,01)^5$$

$$M_5 = 100000 \times 1,0510100501$$

$$M_5 = 105101$$

Jadi banyak penduduk kota tersebut pada akhir tahun 2014 diperkirakan 105.101 orang.

Peluruhan



Peluruhan adalah berubahnya suatu keadaan yang mengalami pengurangan atau penyusutan secara eksponensial.

Bila keadaan awal dinyatakan dengan M_o , laju peluruhan dengan p per periode dan lama peluruhan dengan n , maka keadaan setelah n periode:

Periode n	Peluruhan	M_n
1	$M_o \times p$	$M_1 =$ $M_o - M_o \times p =$ $M_o (1 - p)$
2	$M_1 \times p$	$M_2 =$ $M_1 - M_1 \times p =$ $M_1 (1 - p) =$ $M_o (1 - p)(1 - p) =$ $M_o (1 - p)^2$
3	$M_2 \times p$	$M_3 =$ $M_2 - M_2 \times p =$ $M_2 (1 - p) =$ $M_o (1 - p)^2 (1 - p) =$ $M_o (1 - p)^3$
n	---	$M_n = M_o (1 - p)^n$

Contoh:

Ketika sedang memeriksa seorang bayi yang menderita infeksi telinga, dokter mendiagnosis bahwa mungkin terdapat 1.000.000 bakteri yang menginfeksi. Selanjutnya pemberian penisilin yang diresepkan dokter dapat membunuh 5%

bakteri setiap 4 jam. Coba Anda hitung banyak bakteri setelah 24 jam pertama pemberian penisilin!

Penyelesaian:

Banyak bakteri di awal, $M_o = 1.000.000$
Faktor peluruhan, $p = 5\% = 0,05$ per 4 jam
Periode waktu, $n = 24/4 = 6$ periode
 $M_n = M_o (1 - p)^n$
 $M_6 = 1000000 (1 - 0,05)^6$
 $M_6 = 1000000 \times 735091890625$
 $M_6 = 735091,890625$
 $M_6 = 735092$
Jadi setelah 24 jam jumlahnya tinggal 735.092 bakteri.

Bunga Tunggal



Bunga Tunggal adalah bunga yang diberikan hanya untuk sejumlah uang yang ditabungkan (modal awal/pinjaman awal) sedangkan bunganya tidak berbunga.
Penentuan modal setelah jangka waktu/periode tertentu:

Periode 1: modal menjadi $= M_1 = M_o + bM_o = (1 + b)M_o$
Periode 2: modal menjadi $= M_2 = M_1 + bM_o = (1 + 2b)M_o$
Periode 3: modal menjadi $= M_3 = M_2 + bM_o = (1 + 3b)M_o$
Periode n: modal menjadi $= M_n = M_{n-1} + bM_o = (1 + nb)M_o$

Contoh:

Yunus meminjam uang di bank sebesar Rp 5.000.000,00 dengan suku bunga $2\frac{1}{2}\%$ dan harus dikembalikan dalam jangka waktu 1 bulan. Berapa besarnya bunga dan uang yang harus dikembalikan?

Penyelesaian:

$M_1 = (1 + b)M_o$
 $M_1 = (1 + 2\frac{1}{2}\%)5.000.000$
 $M_1 = (1 + \frac{2,5}{100})5.000.000$
 $M_1 = 1,025 \times 5.000.000$

$M_1 = Rp\ 5.125.000,00$
Jadi, besar bunganya Adalah Rp 125.000,00 dan uang yang harus dikembalikan adalah Rp 5.125.000,00

Bunga Majemuk



Bunga Majemuk. Jika seseorang menyimpan modalnya di bank dalam beberapa kali periode bunga dengan besar bunga tertentu, akan terjadi proses bunga dari modal awal dengan bunga yang tidak diambil. Artinya, modal itu dibungakan lagi pada periode waktu berikutnya.

Penentuan modal setelah periode n dan besar bunga setelah periode n:

Pertama: modal menjadi $= M_1 = M_o + bM_o = (1 + b)M_o$
Kedua: modal menjadi $= M_2 = M_1 + bM_1$
 $= (1 + b)M_o$
 $= (1 + b)(1 + b)M_o$
 $\therefore M_2 = (1 + b)^2M_o$
Ketiga: modal menjadi $= M_3 = M_2 + bM_2$
 $= (1 + b)M_o$
 $= (1 + b)(1 + b)^2M_o$
 $\therefore M_3 = (1 + b)^3M_o$
Ke n: modal menjadi $= M_n = (1 + b)^nM_o$

Besar bunga setelah n periode, ditentukan oleh:

$B_n = M_n - M_o$
 $B_n = (1 + b)^n - M_o$
 $\therefore B_n = [(1 + b)^n - 1]M_o$

Contoh:

Pak Broto menyimpan uang sebesar Rp 600.000.000,00 di bank dengan sistem bunga majemuk sebesar 21% per tahun. Hitunglah:

- a. Besarnya uang Pak broto setelah 6 bulan
- b. Besarnya bunga yang diterima Pak broto setelah 6 bulan

Penyelesaian:

Diketahui:

$$M_o = 600.000.000$$

$$b = 21\% \text{ per tahun}$$

$$b = \frac{21}{12}\% = \frac{1,75}{100} = 0,0175 \text{ per bulan}$$

$$\text{a. } M_6 = (1 + 0,0175)^6 600.000.000$$

$$M_6 = (1,0175)^6 \times 6 \times 10^8$$

$$M_6 = 1,1097022354 \times 6 \times 10^8$$

$$M_6 = 665.821.412,5$$

Jadi, uang Pak Broto setelah 6 bulan

sebesar Rp 665.821.412,5

$$\text{b. } B_6 = M_6 - M_o$$

$$B_6 = 665.821.412,5 - 600.000.000$$

$$B_6 = 65.821.412,5$$

Jadi, besar bunga yang diterima Pak

Broto selama 6 bulan sebesar Rp

65.821.412,5.